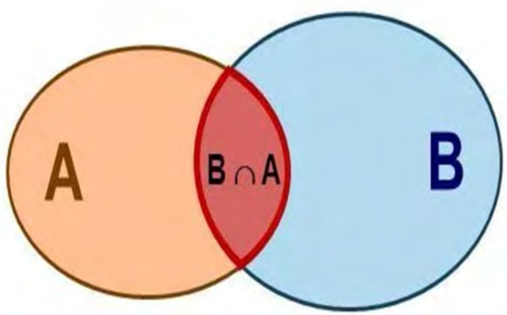
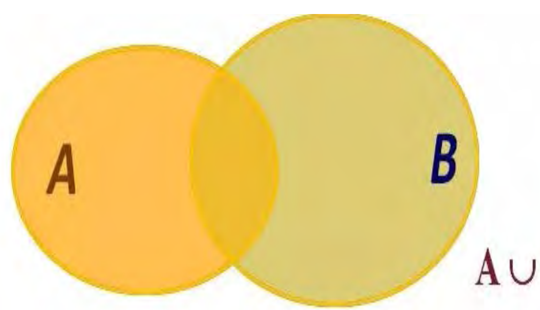
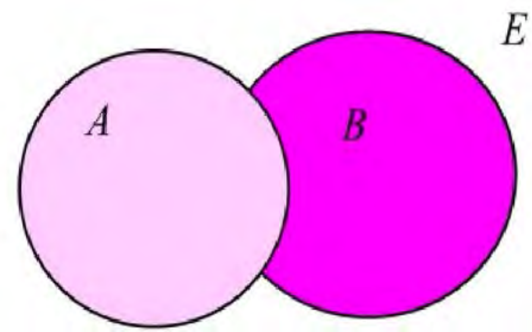
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОУ ВО Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж

Тема урока:

Основные операции над множествами.







Автор: Савинова Лариса Николаевна,
преподаватель математических дисциплин

Цели и задачи урока:

- изучить основные операции над множествами: объединение, пересечение, вычитание, дополнение, прямое произведение;
- рассмотреть свойства операций над множествами;
- научиться изображать результаты операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна;
- содействовать развитию математического мышления обучающихся и побуждать их к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности;
- развивать культуру устной математической речи, чувство самоконтроля.

Основные операции над множествами

«Все правила достойного поведения давным-давно известны, остановка за малым — за умением ими пользоваться»

Б. Паскаль

Объектом исследования дискретной математики являются дискретные множества – совокупность, набор некоторых элементов.

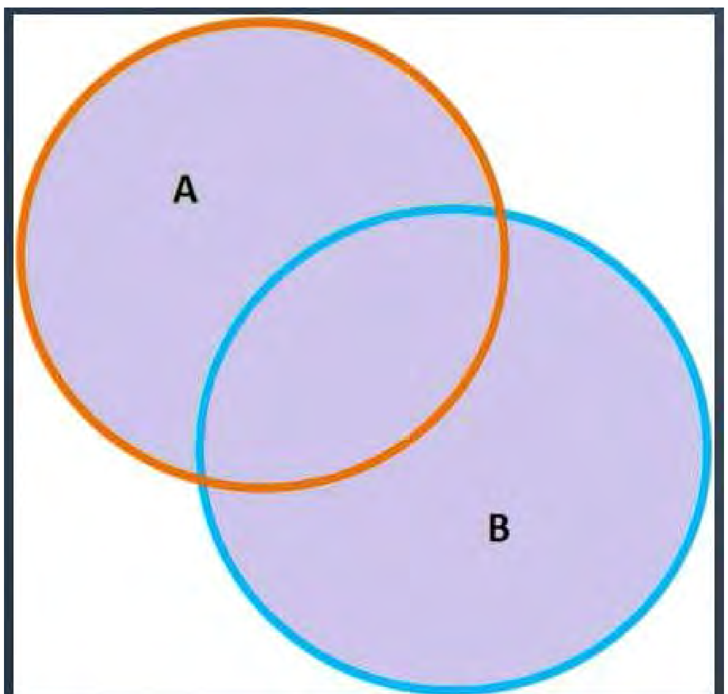
Из данных множеств А и В можно построить новые множества с помощью операций объединения, пересечения, вычитания и др.

1) Объединение (сумма, дизъюнкция) множеств А и В –

это новое множество, состоящее из элементов как множества А, так и множества В.

Это множество обозначается:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$



Читается так:

«объединение множества А и множества В».

Примеры:

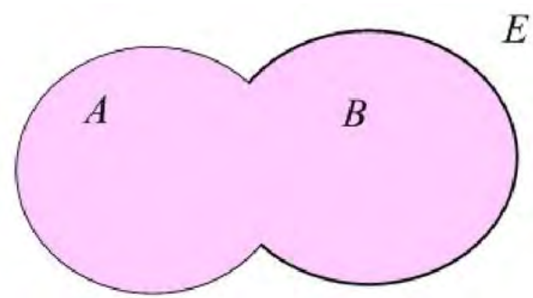
1. [AB] U [CD]=[AD]

A C B D

2. A= {1, 2, 3} и B= {4, 5},

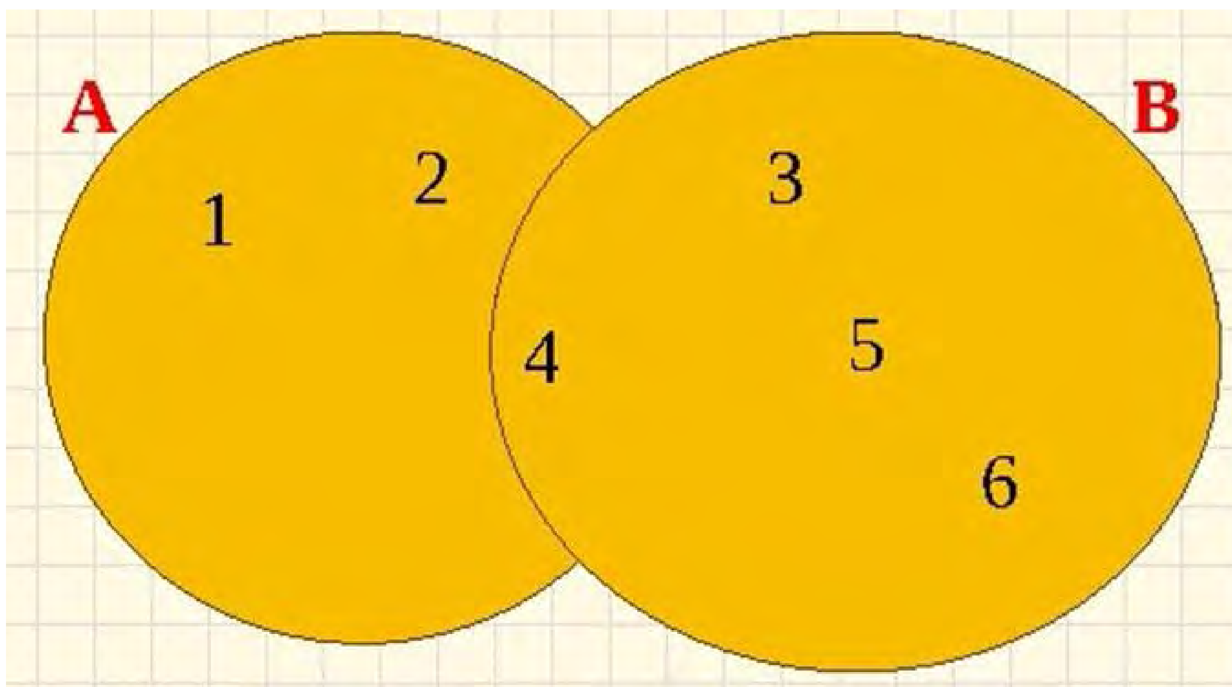
   A U B = {1, 2, 3, 4, 5}.

3. {1, 2, 3} U {3, 4}={1, 2, 3, 4}.
4. Сумма множеств четных и нечетных чисел – множество натуральных чисел.



Примеры:

5. Если $A = \{1, 2, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Примеры:

6. Даны множества A и B, причем A – множество двузначных чисел, кратных 15, B – множество двузначных чисел, кратных 18. Найти объединение множеств A и B.

Решение.

$A = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$,

$B = \{18, 36, 54, 72, 90\}$.

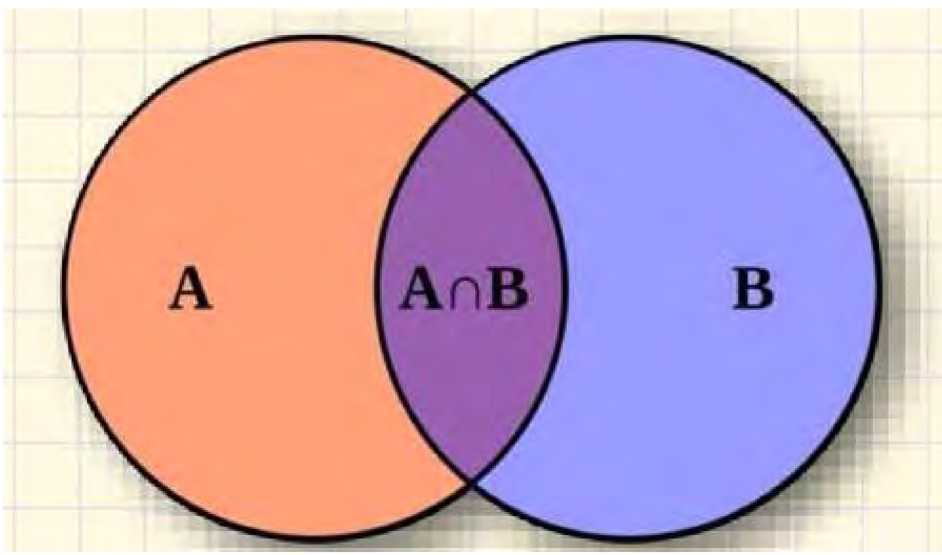
Тогда множество, состоящее из элементов этих множеств образует их объединение:

$$A \cup B = \{15, 18, 30, 36, 45, 54, 60, 72, 75, 90\}.$$

2) Пересечение (конъюнкция) множеств А и В –

это множество, в которое входят только те элементы, которые одновременно принадлежат обоим множествам А и В. Оно обозначается:

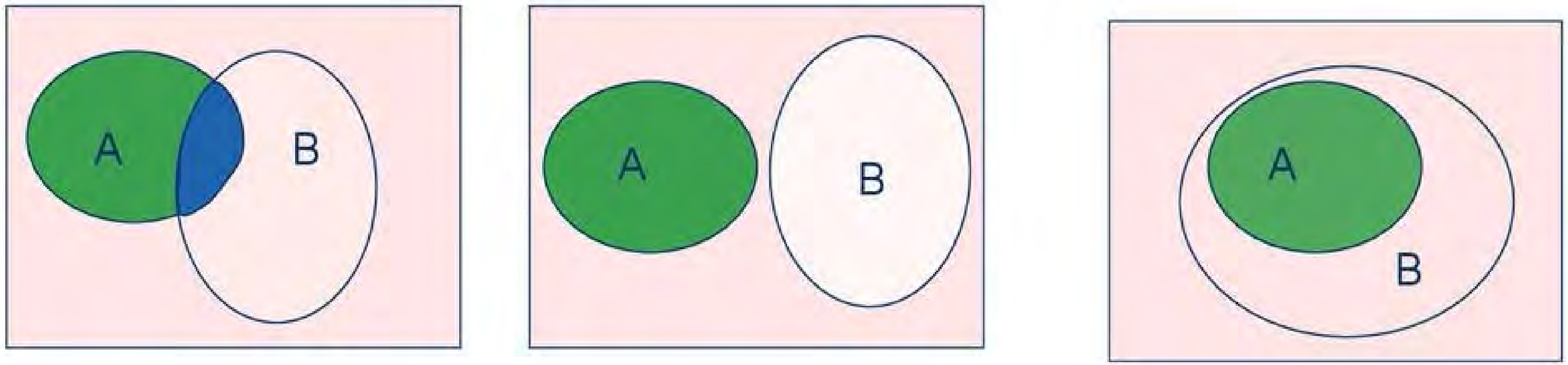
$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x | x \in \mathrm{A} \text{ и } x \in \mathrm{B}\}.$$



Читается так:

«пересечение множеств А и В»

Например, пересечение множеств А и В:

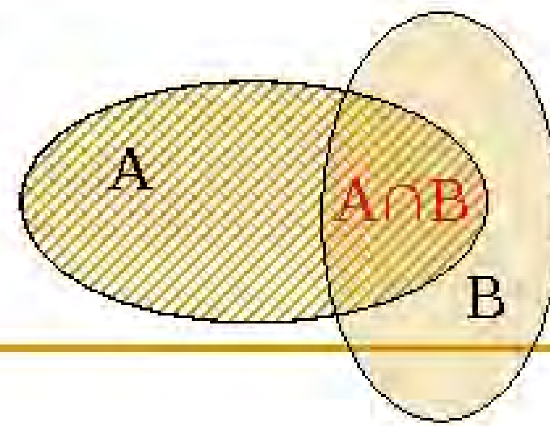


$A \cap B$ $\quad$ $A \cap B = \varnothing$ $\quad$ $A \cap B = A$

Два множества, пересечение которых является пустым множеством, называются непересекающимися множествами.

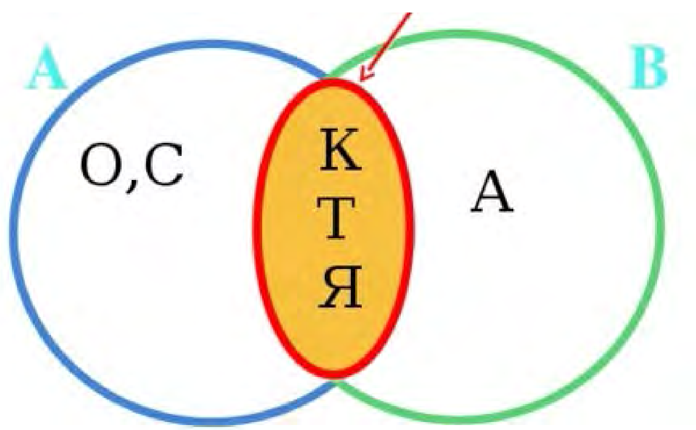
Свойства операции пересечения

- рефлексивность $A \cap A = A$
- коммутативность $A \cap B = B \cap A$
- ассоциативность $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- свойство 0 $A \cap \varnothing = \varnothing$
- свойство 1 $A \cap \mathbf{U} = A$



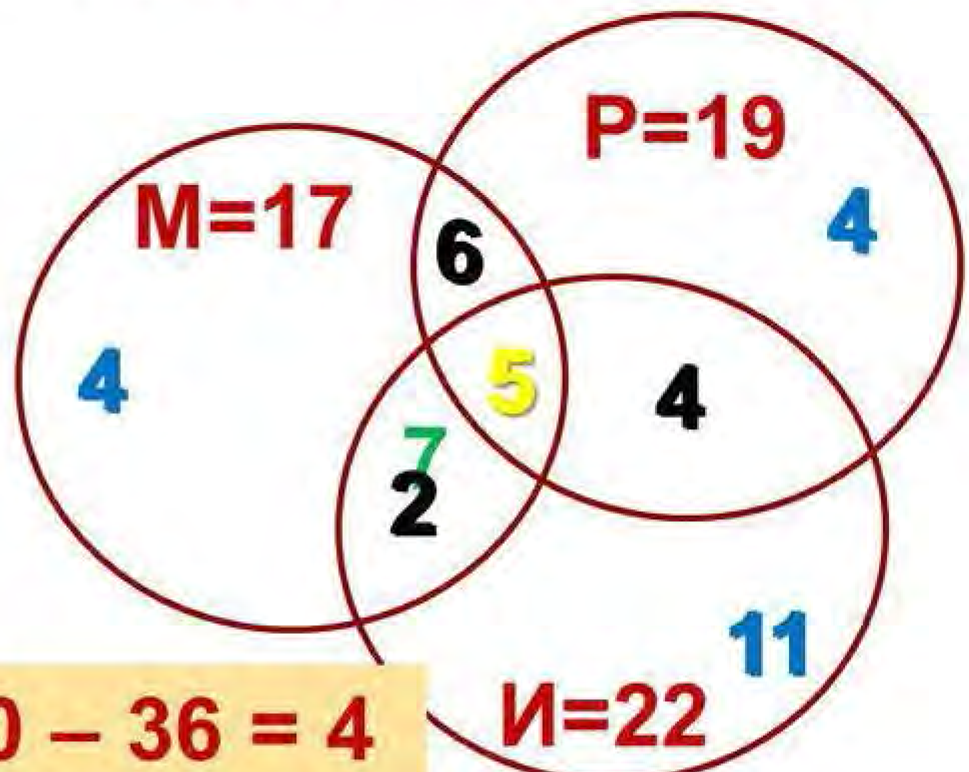
Примеры.

1. Если $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5\}$, то $A \cap B = \{2, 3\}$.
2. Если А - множество четных натуральных чисел, В - множество двузначных чисел, то элементы их пересечения обладают свойством: «быть четными натуральными и двузначными числами»
3. Костя – Катя.



Пример 4.

В классе учатся **40 человек**. Из них по русскому языку имеют «тройки» 19 человек, по математике – 17 человек и по истории – 22 человека. Только по одному предмету имеют «тройки»: по русскому языку – 4 человека, по математике – 4 человека, по истории – 11 человек. Семь учеников имеют «тройки» и по математике и по истории, а 5 учеников – «тройки» по всем предметам. **Сколько человек учится без «троек»?**



40 – 36 = 4

Задание.

Найти пересечение множеств

5. A= {1, 3, 5, 7, 9} и B= {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
6. A= {1, 3, 5, 7, 9} и B= {2, 4, 6, 8}.
7. Множество А состоит из букв слова «Математика». Множество В состоит из букв слова «Алгебра».
8. Множество А состоит из четных натуральных чисел, не превосходящих 20. Множество В состоит из чисел, кратных 3 и не превосходящих 20.

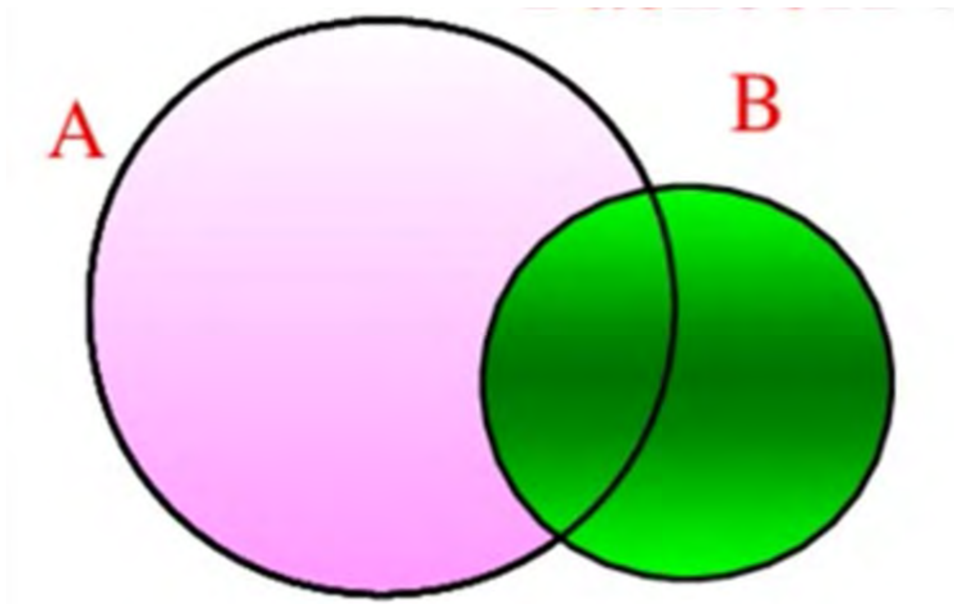
Свойства операций над множествами:

1). если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность),
2). если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$,
3). $A \cup A = A$,
4). $A \cup \varnothing = A$,
5). $A \cap A = A$,
6). $A \cap \varnothing = \varnothing$,
7). $A - A = \varnothing$,
8). $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность сложения),
9). $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность умножения),
10). $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность сложения),
11). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения),
12). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения),
13). $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно вычитания),
14). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

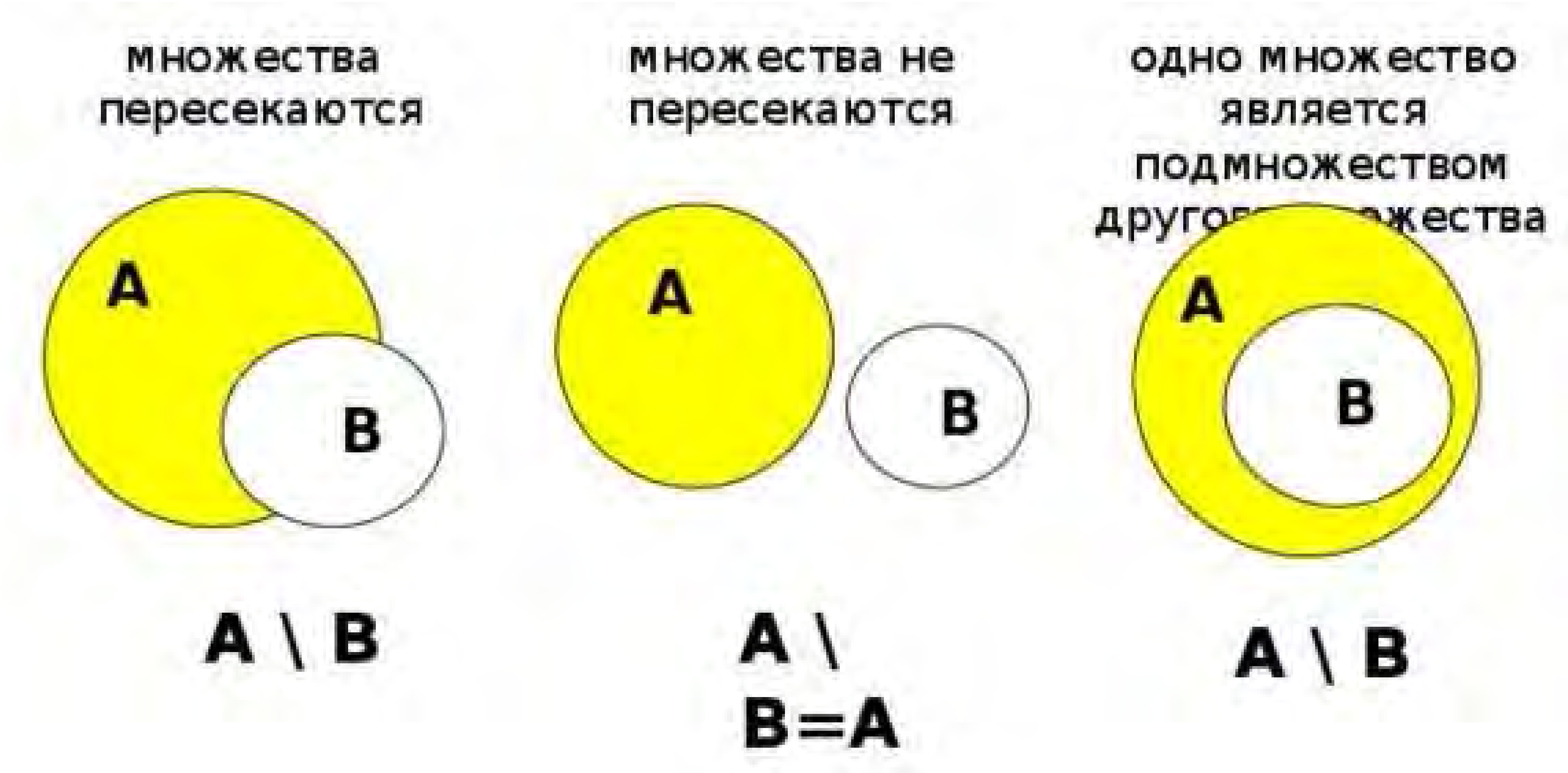
3) Вычитание множеств. Дополнение до множества.

Разностью множеств А и В называется множество, которое состоит из всех элементов множества А, не принадлежащих множеству В. Она обозначается:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$



Например, разность множеств:



Примеры.

1. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$.

   Тогда $A \setminus B = \{3, 4\}$, $B \setminus A = \varnothing$.
2. Если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{4, 5, 6\}$.
3. Если $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4\}$, то $A \setminus B = \{1, 2, 5\}$, $B \setminus A = \{3, 4\}$.
4. Если $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, то

   $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{3\}$.

Примеры.

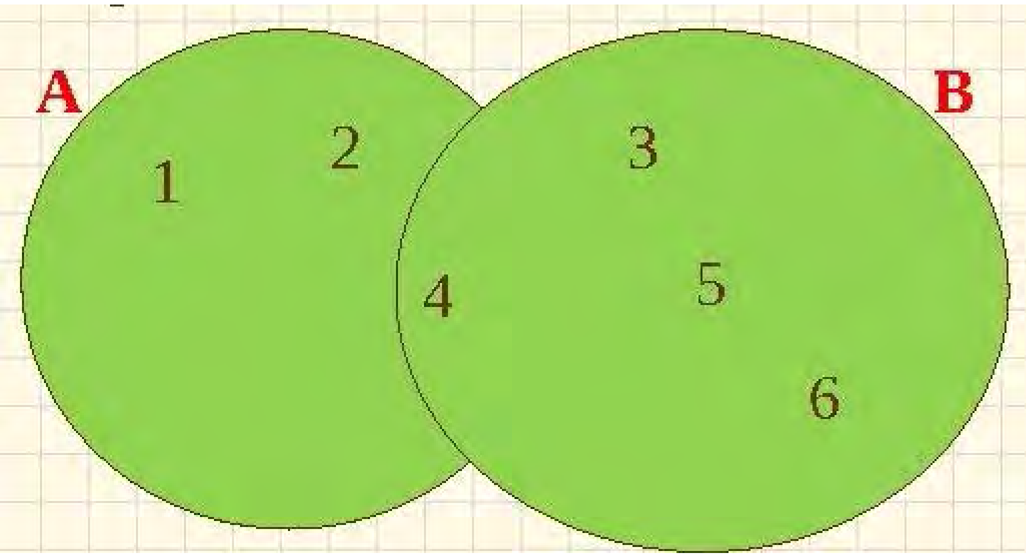
5. Пусть A= {1, 3, 4, 7, 8, 9, 10},

B= {2, 3, 4, 5, 6, 7}.

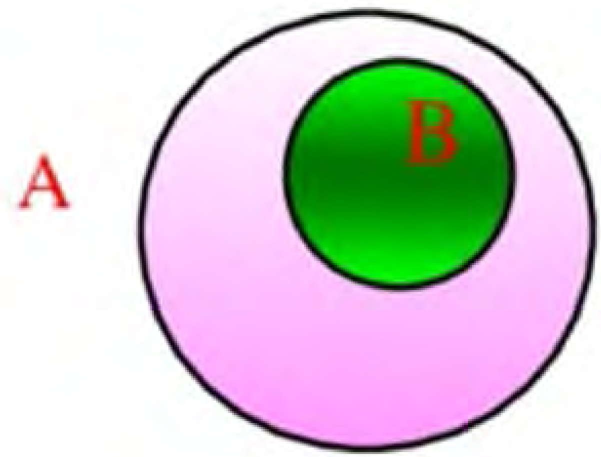
Тогда A\B= {1, 8, 9, 10}, B\A= {2, 5, 6}.

6. Пусть A= {1, 2, 3, 4}, B= {3, 4, 5}.

Тогда A\B= {1, 2}.



Дополнение множеств



Если B подмножество A, то разность A \ B называется дополнением множества B до множества A.

- Например, дополнением множества целых чисел до множества рациональных чисел является множество дробных чисел.

Свойства разности множеств

Теорема 4

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

1) $A \setminus A = \varnothing$

2) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$

3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Теорема 5 (законы Моргана)

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$

б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus B)$

4) Прямое произведение множеств

Прямым произведением множеств A и B называется множество, элементами которого являются все упорядоченные пары (a, b) или (x,y), в которых первым элементом является элемент из множества A, вторым – из множества B. Она обозначается:

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \{(a, b) | a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}\}.$$

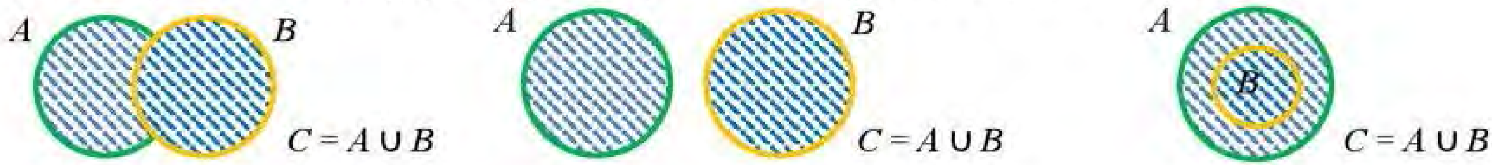
- **Пример.** Пусть A = {1, 2}, B = {1, 3, 4}. Тогда A × B = {(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)}.

Закрепление материала.

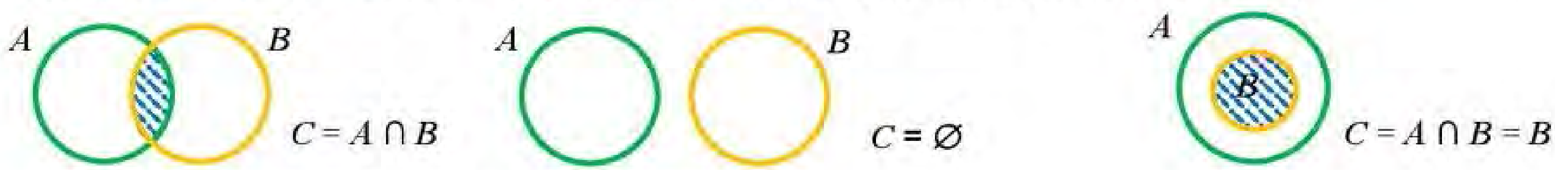
Операции над множествами

Объединение множеств

$A \cup B$ = {все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A и B}

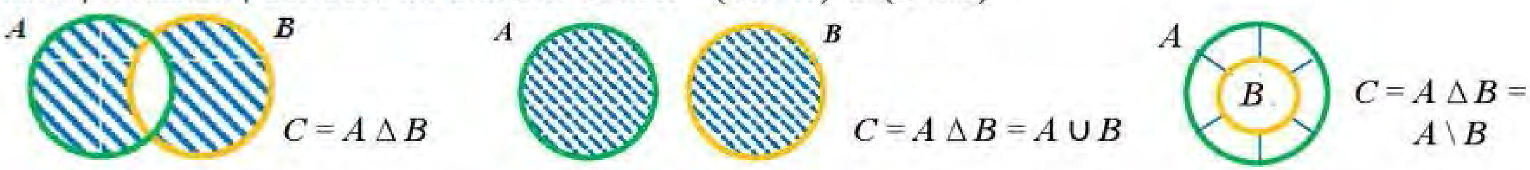


Пересечение множеств $A \cap B$ = {все элементы, принадлежащие как A, так и B}



Разность множеств $A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$

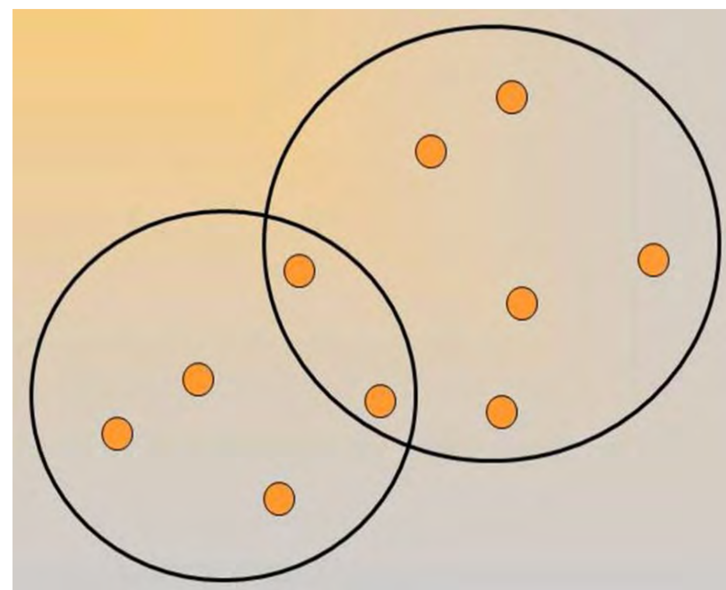
Симметрическая разность множеств $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Упражнения

1. A= {1, 2, 3}, B= {3, 4, 5}, C= {3, 6, 7}. Найти объединение и пересечение данных множеств и изобразить их с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

2. Сколько элементов в каждом множестве, в их пересечении и объединении?



Упражнения

3. Даны множества A= {1, 2, 3, 7, 9, 11, 20} и B= {2, 3, 4, 5, 6, 7}. Найти A\B, B\A.

4.

Даны множества A={2, 3, 5, 8, 13, 15}, B={1, 3, 4, 8,16}, C={12, 13, 15, 16}, D={0, 1, 20}.

Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \cap D$, $A \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup D \cap C$, $A \cap C \setminus D$.

Домашнее задание

№ 1. Даны отрезки $A = [-4;\, 5)$, $B = (2;\, 6]$, $C = (5;\, 10]$.

Найти:

а) $(A \cup B) \cup C$

б) $A \cap B$

в) $(A \cap B) \cup C$

г) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

д) $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$

№ 2. На множестве U всех букв русского алфавита заданы множества *A, B, C*:

$A = \{\text{у, н, и, в, е, р}\}$	$A = \{\text{с, а, д, о, в, н, и, к}\}$
$B = \{\text{з, а, ч, е, т}\}$	$B = \{\text{р, о, з, а}\}$
$C = \{\text{э, к, з, а, м, е, н}\}$	$C = \{\text{х, р, и, з, а, н, т, е, м, ы}\}$

Найдите следующие множества, определите их мощность, изобразите их кругами Эйлера.

а) $A \cap B$, $A \cup B$

б) $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C \setminus A$

в) $A \times B$

г) $(A \cap B) \cup C$

д) $(A \cup C) \cap B$

е) $D = U \setminus (A \cup B \cup C)$